

Die Irrfahrt eines Käfers auf dem Quadrat, dem Würfel und in höheren Dimensionen

HINRICH LORENZEN UND MICHAEL SCHMITZ, FLENSBURG

Zusammenfassung: Winkenbach (2011) und Riehl (2013) haben Käferwanderungen auf dem Würfel betrachtet, wobei der Schwerpunkt auf der Behandlung in der Grundschule bzw. in der Mittelstufe lag. Wir betrachten Irrfahrten eines Käfers auf einem Quadrat und einem Würfel, die Anlässe für verschiedene stochastische Überlegungen bieten, die für die Behandlung in der Oberstufe oder zu Studienbeginn geeignet sein können. Dabei werden verschiedene Modellierungen betrachtet, die je nach Allgemeinheit der Fragestellung unterschiedliche Vor- und Nachteile besitzen. In einem Ausblick wird noch aufgezeigt, wie sich die Fragestellung auf höhere Dimensionen verallgemeinern ließe. Der vorliegende Artikel möchte u. a. aufzeigen, dass es sinnvoll sein kann, nach alternativen Ansätzen Ausschau zu halten, obwohl man bereits eine Methode gefunden hat, die in Spezialfällen gut funktioniert.

1 Einleitung – Kopfgeometrie

Wir beschreiben einleitend ein kopfgeometrisches Spiel, das als aktivierender Einstieg und Vorbereitung für die im weiteren Verlauf betrachteten stochastischen Fragestellungen dienen kann.

(a) *Käferwanderung auf dem Quadrat.* Ein Käfer steht in der linken unteren Ecke eines Quadrats. Wir können ihm Anweisungen geben, damit er auf den Seiten des Quadrats von Ecke zu Ecke läuft. Der Befehl x veranlasst den Käfer zu einer Bewegung nach links oder rechts (je nach Möglichkeit) und der Befehl y lässt ihn nach oben oder unten laufen. Die Position des Käfers am Ende einer Kette von Befehlen soll ohne Verwendung von Papier (am besten mit geschlossenen Augen) vorhergesagt werden. Nach Durchlaufen der Befehlskette $xyxyxyxx$ steht der Käfer z. B. in der Ecke C (siehe Abb. 1).

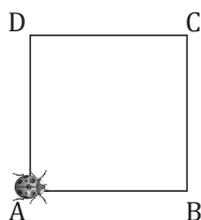


Abb. 1: Käferwanderung auf dem Quadrat

Es lässt sich nach einigen Runden schön herausarbeiten, dass für die Endposition des Käfers nur relevant ist, ob die Befehle x bzw. y gerade oder ungerade häufig auftreten. Weil im Beispiel sowohl x als auch y ungerade häufig vorkommen, bewirkt die obige Befehlskette dasselbe wie die kürzere Anweisung xy .

(b) *Käferwanderung auf dem Würfel.* Nun befindet sich der Käfer in der linken unteren und vorderen Ecke eines Würfels und kann die Befehle x, y und z verarbeiten, die jeweils eine Bewegung längs der entsprechenden Koordinatenachse bewirken (siehe Abb. 2).

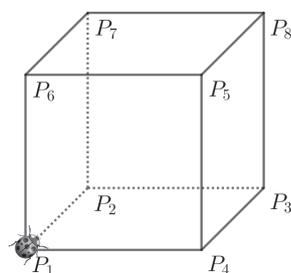


Abb. 2: Käferwanderung auf dem Würfel

Erneut lässt sich herausarbeiten, dass es zur Bestimmung der Endposition nur darauf ankommt, ob die jeweiligen Befehle gerade oder ungerade häufig in einer Befehlskette auftreten, und dieser Gedanke wird später noch von Bedeutung sein. Beispielsweise bewirkt $xyzxxzy$ dasselbe wie der verkürzte Befehl x , die Endposition des Käfers ist P_4 .

2 Stochastische Fragestellungen

Der Käfer führt nun eine einfache Irrfahrt (oder *random walk*; für eine ausführliche Einführung siehe Henze (2018)) auf dem Quadrat bzw. Würfel durch, d. h. die Befehle x, y (beim Würfel x, y, z) werden wiederholt zufällig, und zwar mit gleicher Wahrscheinlichkeit (beim Quadrat jeweils $1/2$ und beim Würfel $1/3$) gegeben. Verschiedene stochastische Fragestellungen sind denkbar, als interessant und fruchtbar hat sich die Frage nach der Wahrscheinlichkeit für das folgenden Ereignis E_n^2 (bzw. E_n^3) herausgestellt:

Der Käfer beendet seine Irrfahrt auf dem Quadrat (bzw. auf dem Würfel) nach n Schritten in der seiner Startposition gegenüberliegenden Ecke.

Wir betrachten zunächst die Irrfahrt auf dem Quadrat. Schnell wird klar, dass $P(E_n^2) = 0$ ist, falls n ungerade ist, was man gut begründen kann, indem man sich auf die Erkenntnis aus dem kopfgeometrischen Spiel von oben bezieht. Erhält der Käfer eine ungerade Anzahl an Befehlen aus $\{x, y\}$, so kann nicht sowohl x als auch y ungerade häufig aufgetreten sein, denn die Summe zweier ungerader Zahlen ist gerade. Ohne weitere Schwierigkeiten stellt man auch $P(E_2^2) = 1/2$ fest. Der erste interessante Fall ist die Untersuchung der Irrfahrt mit $n = 4$ Schritten. Als schülergerechter Zugang bietet sich ein Baumdiagramm (Abb. 3) an. Die Bezeichnungen der Ecken sind Abb. 4 zu entnehmen.

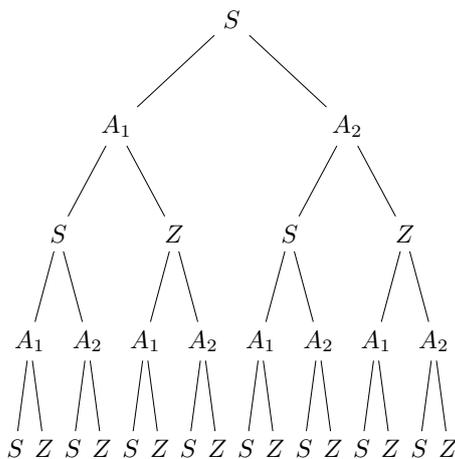


Abb. 3: Vollständiges Baumdiagramm

Im Baumdiagramm besitzt jeder Ast die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ und jeder Pfad die Wahrscheinlichkeit $(\frac{1}{2})^4 = \frac{1}{16}$. Man liest direkt $P(E_4^2) = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$ ab. Für weitere Untersuchungen sollten wir die Darstellung vereinfachen. Die Erkenntnis, dass die Ecken A_1 und A_2 aus Symmetriegründen dieselbe Rolle spielen ist hilfreich, und ein Übergangsgraph (siehe Abb. 4, links) ist übersichtlicher als ein Baumdiagramm.

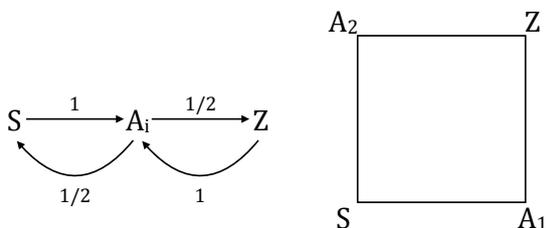


Abb. 4: Ein Übergangsgraph

Der Graph liest sich folgendermaßen: Der Käfer startet in der Ecke S und bewegt sich im ersten Schritt mit der Wahrscheinlichkeit 1 in eine der Ecken A_i .

Von dort bewegt er sich mit einer Wahrscheinlichkeit von jeweils $1/2$ nach Z oder zurück nach S . Steht der Käfer in der Ecke S , so muss er im nächsten Schritt wieder zu einer der Ecken A_i . Im Übergangsgraph können auf zwei Arten vier Schritte so vollzogen werden, dass die Endposition Z ist. Entweder $S \rightarrow A_i \rightarrow Z \rightarrow A_i \rightarrow Z$ mit Wahrscheinlichkeit $1/4$ oder $S \rightarrow A_i \rightarrow S \rightarrow A_i \rightarrow Z$ ebenfalls mit Wahrscheinlichkeit $1/4$. Wir erhalten (erneut) $P(E_4^2) = 1/2$. Man kann anhand des Übergangsgraphen auch $P(E_6^2) = 1/2$ erhalten und sich folgendermaßen klarmachen, dass für jede gerade Schrittzahl n die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses E_n^2 gleich $1/2$ ist: Nach einer ungeraden Schrittzahl steht der Käfer stets bei einer der Ecken A_i . Von dort geht er mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ nach S und mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ nach Z .

Als nächstes wollen wir $P(E_n^3)$ für einige konkrete n bestimmen, d. h. wir betrachten Irrfahrten auf dem Würfel. Man erkennt schnell, dass $P(E_n^3) = 0$ ist, falls n gerade ist, was wir wieder anhand unserer Erkenntnisse von oben einsehen können. Wird insgesamt eine gerade Anzahl an Befehlen aus $\{x, y, z\}$ gegeben, so kann nicht jeder der Befehle x, y, z ungerade häufig aufgetreten sein, denn sonst wäre auch die Gesamtzahl der Befehle ungerade. Für weitere Untersuchungen kann wieder ein Übergangsgraph hilfreich sein.

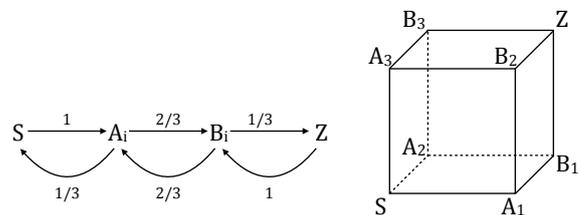


Abb. 5: Bestimmung von $P(E_n^3)$

Wir lesen direkt ab: $P(E_3^3) = 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$.

Will der Käfer in fünf Schritten von S nach Z gelangen, so muss er auf jeden Fall die drei Schritte des direkten Weges ($S \rightarrow A_i \rightarrow B_i \rightarrow Z$) gehen, und die Wahrscheinlichkeit dafür ist $g := 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$. Außerdem muss er genau eine Rückwärtsschleife einlegen (da eine solche genau 2 Schritte dauert), und zwar bei A_i, B_i oder Z . Die Wahrscheinlichkeiten dafür betragen $a := 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$, $b := \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$ und $z := \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}$ (vgl. Abb. 5), und es folgt

$$P(E_5^3) = g(a + b + z) = \frac{2}{9} \cdot \frac{10}{9} = \frac{20}{81}.$$

Will der Käfer in 7 Schritten von S nach Z gelangen, so muss er wieder die drei Schritte des direkten

Weges (mit Wahrscheinlichkeit g) gehen, und genau zwei Rückwärtsschleifen einlegen. Das kann entweder eine Doppelschleife bei A_i oder bei B_i oder bei Z (mit den Wahrscheinlichkeiten a^2, b^2 bzw. z^2) sein, oder er führt zwei Rückwärtsschleifen an verschiedenen Orten durch. Hier kommen eine Schleife bei A_i und eine bei B_i oder anders herum (mit Wahrscheinlichkeit $2ab$), oder eine bei B_i und eine bei Z oder anders herum (mit Wahrscheinlichkeit $2bz$), oder eine bei A_i und eine bei Z – in diesem Fall geht es nicht anders herum – (mit Wahrscheinlichkeit az) infrage. Insgesamt erhalten wir

$$P(E_5^3) = g(a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bz + az) = \frac{182}{729}.$$

Man sieht, dass die Verwendung des Übergangsgraphen bereits hier und erst recht für größere n mühselig und fehleranfällig wird. Daher kann es sinnvoll sein, nach einer anderen Modellierung Ausschau zu halten.

3 Eine alternative Modellierung

Wir erinnern uns noch einmal an das kopfgeometrische Spiel von oben, das uns nun helfen wird, die Situation anders zu modellieren. Jeder mögliche Weg mit n Schritten auf dem Würfel lässt sich durch eine Befehlskette der Länge n ausdrücken, wobei nur die Buchstaben x, y und z verwendet werden. Wir notieren diese Befehlsketten als Tupel (man könnte auch Wörter der Länge n über dem Alphabet $\{x, y, z\}$ verwenden, wenn einem diese Sprechweise lieber ist) und verwenden als Ergebnismenge

$$\Omega_n^3 = \{(s_1, s_2, \dots, s_n) \mid s_1, \dots, s_n \in \{x, y, z\}\}.$$

Da es für jede Position drei mögliche Einträge gibt, gilt $|\Omega_n^3| = 3^n$. Wie oben herausgearbeitet, besteht das betrachtete Ereignis E_n^5 aus denjenigen n -Tupeln, in denen jeder der Buchstaben x, y und z ungerade häufig auftritt.

Wir wollen erneut $P(E_5^3)$ bestimmen, um die neue Methode zu illustrieren. Wir haben die Anzahl aller 5-Tupel mit Einträgen aus $\{x, y, z\}$ zu bestimmen, in denen jeder der Buchstaben x, y, z ungerade häufig auftritt. Da $5 = 3 + 1 + 1$ (abgesehen von der Reihenfolge der Summanden) die einzige Darstellung von 5 als Summe von drei ungeraden natürlichen Zahlen ist, muss einer der Buchstaben x, y oder z genau dreimal und die anderen beiden genau einmal verwendet werden. Wir haben 3 Möglichkeiten, den Buchstaben zu wählen, der dreimal auftritt. Dann gibt es $\binom{5}{3}$ Möglichkeiten aus den fünf Positionen drei

auszuwählen, an denen dieser Buchstabe steht. Anschließend gibt es 2 Möglichkeiten für die Position des zweiten Buchstabens, und die Position des letzten Buchstabens liegt fest. Also gibt es $3 \cdot \binom{5}{3} \cdot 2$ solche 5-Tupel, und wir erhalten

$$P(E_5^3) = \frac{3 \cdot \binom{5}{3} \cdot 2}{3^5} = \frac{20}{81}.$$

Wir betrachten nun den Fall $n = 7$, lassen den Käfer also sieben Schritte auf dem Würfel krabbeln. Es gilt

$$\Omega_7^3 = \{(s_1, \dots, s_7) \mid s_1, \dots, s_7 \in \{x, y, z\}\},$$

und E_7^3 ist die Menge aller 7-Tupel mit Einträgen aus $\{x, y, z\}$, in denen sowohl x als auch y und z ungerade häufig auftritt. Es gibt (bis auf die Reihenfolge der Summanden) genau zwei Darstellungen der 7 als Summe von drei ungeraden Summanden, nämlich $7 = 5 + 1 + 1$ und $7 = 1 + 3 + 3$. Also muss einer der Buchstaben x, y, z fünfmal und die anderen beiden je einmal, oder einer der Buchstaben einmal und die anderen beiden je dreimal verwendet werden. Im ersten Fall gibt es 3 Möglichkeiten, den Buchstaben zu wählen, der fünfmal vorkommt. Dann gibt es $\binom{7}{5}$ Möglichkeiten fünf der sieben Positionen des Tupels für diesen auszuwählen. Für den nächsten Buchstaben bleiben 2 mögliche Positionen, und die Position des letzten Buchstabens liegt fest. Insgesamt gibt es also $3 \cdot \binom{7}{5} \cdot 2$ solche 7-Tupel.

Im zweiten Fall gibt es 3 Möglichkeiten, den Buchstaben auszuwählen, der einmal vorkommt. Für seine Position gibt es 7 Möglichkeiten. Es gibt $\binom{6}{3}$ Möglichkeiten aus den verbleibenden sechs Positionen drei für den zweiten Buchstaben zu wählen. Die drei Positionen, an denen der letzte Buchstabe steht, liegen nun fest. Also gibt es $3 \cdot 7 \cdot \binom{6}{3}$ solche 7-Tupel, und es folgt

$$P(E_7^3) = \frac{3 \cdot \binom{7}{5} \cdot 2 + 3 \cdot 7 \cdot \binom{6}{3}}{3^7} = \frac{182}{729}.$$

4 Allgemeinere Überlegungen: n Schritte auf dem Würfel

Wir wollen nun eine geschlossene Formel für $P(E_n^3)$ für eine beliebige ungerade natürliche Zahl n herleiten. Unsere jetzige Auffassung des Ereignisses E_n^3 als Menge aller n -Tupel mit Einträgen aus $\{x, y, z\}$, in denen jeder der Buchstaben ungerade häufig auftritt, ist dazu sehr hilfreich. Wir sollten die Anzahl dieser Tupel aber etwas systematischer abzählen als oben. Dadurch entstehen in konkreten Fällen für kleines n zwar mehr Summanden, wir können dies dann

aber besser allgemein ausdrücken und weiter vereinfachen. Wir illustrieren das Vorgehen zunächst beispielhaft, indem wir noch einmal $P(E_7^3)$ bestimmen.

Zuerst zählen wir alle Tupel, in denen x genau einmal auftritt. Es gibt $\binom{7}{1}$ Möglichkeiten, die Position für x zu wählen. Tritt y ebenfalls genau einmal auf, so gibt es $\binom{6}{1}$ Möglichkeiten eine Position für y zu wählen; die Positionen, an denen z steht, liegen dann fest. Tritt y dreimal auf, so gibt es $\binom{6}{3}$ Möglichkeiten, die drei Positionen für y zu wählen. Tritt y fünfmal auf, so gibt es $\binom{6}{5}$ Möglichkeiten, die Positionen für y zu wählen. Insgesamt gibt es also $\binom{7}{1} \left[\binom{6}{1} + \binom{6}{3} + \binom{6}{5} \right]$ 7-Tupel, in denen x genau einmal auftritt.

Analog erhalten wir $\binom{7}{3} \left[\binom{4}{1} + \binom{4}{3} \right]$ 7-Tupel, in denen x genau dreimal auftritt. Außerdem gibt es noch $\binom{7}{5} \cdot \binom{2}{1}$ 7-Tupel, in denen x genau fünfmal auftritt, und insgesamt folgt

$$\begin{aligned} |E_7^3| &= \binom{7}{1} \left[\binom{6}{1} + \binom{6}{3} + \binom{6}{5} \right] \\ &\quad + \binom{7}{3} \left[\binom{4}{1} + \binom{4}{3} \right] \\ &\quad + \binom{7}{5} \cdot \binom{2}{1}. \end{aligned}$$

Dieselbe Überlegung mit beliebigem ungeraden n liefert für die Mächtigkeit von E_n^3 den Ausdruck

$$\begin{aligned} &\binom{n}{1} \left[\binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{3} + \dots + \binom{n-1}{n-2} \right] \\ &+ \binom{n}{3} \left[\binom{n-3}{1} + \binom{n-3}{3} + \dots + \binom{n-3}{n-4} \right] \\ &+ \dots \\ &+ \binom{n}{n-2} \cdot \binom{2}{1}, \end{aligned}$$

oder, etwas kompakter notiert,

$$|E_n^3| = \sum_{\substack{i < n \\ i \text{ ungerade}}} \binom{n}{i} \sum_{\substack{j < n-i \\ j \text{ ungerade}}} \binom{n-i}{j}. \quad (1)$$

Um eine geschlossene Formel zu erhalten, wollen wir zunächst die innere Summe, die von der Gestalt

$$\sum_{\substack{j < m \\ j \text{ ungerade}}} \binom{m}{j}$$

ist, geschlossen darstellen (hierbei ist $m = n - i$ gerade). Indem man einige Beispiele betrachtet, kommt

man schnell zu der Vermutung

$$\sum_{\substack{j < m \\ j \text{ ungerade}}} \binom{m}{j} = 2^{m-1}.$$

Eine elegante Begründung für die Gültigkeit dieser Beziehung ist die folgende. Es gibt 2^m Teilmengen der Menge $\{1, \dots, m\}$ und genau die Hälfte davon hat eine ungerade Mächtigkeit. Da die Summe die Anzahl aller Teilmengen ungerader Mächtigkeit angibt, stimmt sie mit $\frac{1}{2}2^m = 2^{m-1}$ überein.

Eine andere Herleitung verwendet den binomischen Lehrsatz. Es gilt

$$2^m = (1+1)^m = \sum_{j \leq m} \binom{m}{j},$$

sowie

$$0 = (1-1)^m = \sum_{j \leq m} \binom{m}{j} (-1)^j.$$

Subtrahiert man die untere von der oberen Gleichung, so heben sich alle Summanden mit geradem j gegeneinander auf, und alle Summanden mit ungeradem j stehen doppelt da. Es folgt

$$2^m = 2 \sum_{\substack{j \leq m \\ j \text{ ungerade}}} \binom{m}{j} = 2 \sum_{\substack{j < m \\ j \text{ ungerade}}} \binom{m}{j},$$

wobei wir verwendet haben, dass m gerade ist. Division durch 2 schließt das Argument ab.

Nun nimmt Formel (1) folgende Gestalt an:

$$\begin{aligned} |E_n^3| &= \sum_{\substack{i < n \\ i \text{ ungerade}}} \binom{n}{i} 2^{n-i-1} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{i < n \\ i \text{ ungerade}}} \binom{n}{n-i} 2^{n-i}. \quad (2) \end{aligned}$$

Um auch dies geschlossen auszudrücken, verwenden wir noch einmal den binomischen Lehrsatz. Es gilt

$$3^n = (1+2)^n = \sum_{i \leq n} \binom{n}{n-i} 2^{n-i},$$

sowie

$$-1 = (1-2)^n = \sum_{i \leq n} \binom{n}{n-i} (-2)^{n-i}.$$

Wir beachten, dass $n - i$ und i stets verschiedene Paritäten haben, weil n ungerade ist, addieren daher und erhalten

$$3^n - 1 = 2 \sum_{\substack{i \leq n \\ i \text{ ungerade}}} \binom{n}{n-i} 2^{n-i}.$$

Division durch 2 und Subtraktion des letzten Summanden (der gleich 1 ist) ergibt

$$\frac{3^n - 3}{2} = \sum_{\substack{i < n \\ i \text{ ungerade}}} \binom{n}{n-i} 2^{n-i},$$

und Einsetzen in (2) liefert

$$|E_n^3| = \frac{3^n - 3}{4}.$$

Wir beachten noch $|\Omega_n^3| = 3^n$, und erhalten schlussendlich

$$P(E_n^3) = \frac{3^n - 3}{4 \cdot 3^n} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4 \cdot 3^{n-1}}$$

für jede ungerade natürliche Zahl n . Man sieht diesem Ausdruck sehr schön an, dass sich diese Wahrscheinlichkeit für große ungerade n dem Wert $\frac{1}{4}$ immer mehr annähert, was auch plausibel ist. Nach einer ungeraden Anzahl an Schritten kommen nur vier der acht Ecken des Würfels als Positionen des Käfers infrage. Es ist naheliegend, dass bei einer großen Anzahl an Schritten jede der vier möglichen Positionen etwa gleich wahrscheinlich ist.

5 Höhere Dimensionen

Wir wollen hier noch skizzieren, wie sich die Fragestellung auf höhere Dimensionen verallgemeinern lässt. Aus Platzgründen wird Vieles recht undetailliert dargestellt, und würde zunächst einer weiteren Ausarbeitung bedürfen. Geht man mit Lernenden in diese Richtung, ergeben sich allerdings sehr interessante Arbeitsfelder, wie z. B. verschiedene Vorstellungen eines d -dimensionalen Würfels oder die Anzahl der Partitionen einer n -elementigen Menge in d Blöcke (unter gewissen Nebenbedingungen).

Wir wollen zunächst die Käferwanderung auf dem 4-dimensionalen Einheitswürfel $Q_4 := \{(x_1, \dots, x_4) \mid x_1, \dots, x_4 \in \{0, 1\}\}$ betrachten. Dabei gilt es natürlich zuerst zu klären, was unter einem 4-dimensionalen Würfel überhaupt zu verstehen ist. Eine Abbildung in folgender Art könnte dabei hilfreich sein:

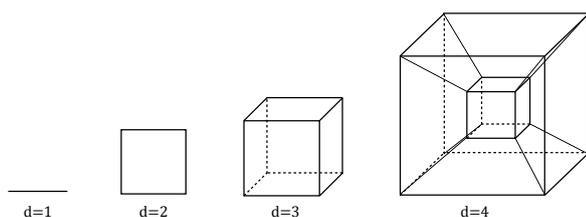


Abb. 6: Würfel in den Dimensionen 1 bis 4

Außerdem muss geklärt werden, was im 4-dimensionalen Würfel gegenüberliegende Ecken sind. Wir führen zusätzlich zu den Befehlen x, y, z den Befehl w ein, welcher den Käfer zu einem Wechsel zwischen dem großen und dem kleinen Würfel veranlasst (siehe Abb. 6). Es ist nun plausibel, dass die zur Ausgangsposition $(0, 0, 0, 0)$ - der linken unteren und vorderen Ecke des kleinen Würfels - gegenüberliegende Position $(1, 1, 1, 1)$ ist, also die rechte obere und hintere Ecke des großen Würfels. Wir stellen fest, dass $P(E_n^4) = 0$ ist, falls n ungerade (oder kleiner als 4) ist, was wir in unserer gewohnten Modellierung leicht einsehen können, denn wir arbeiten nun mit der Ergebnismenge

$$\Omega_n^4 = \{(s_1, \dots, s_n) \mid s_1, \dots, s_n \in \{x, y, z, w\}\},$$

und das Ereignis E_n^4 , dass der Käfer nach n Schritten in der gegenüberliegenden Ecke steht, besteht aus allen n -Tupeln, in denen jeder der Buchstaben x, y, z, w ungerade häufig auftritt. Da die Summe von vier ungeraden Zahlen stets gerade ist, gilt $P(E_n^4) = 0$, falls n ungerade ist.

Die erste interessante Wahrscheinlichkeit ist also $P(E_4^4)$. Diese ist leicht bestimmt, da E_4^4 die Menge aller 4-Tupel ist, in denen jeder der Buchstaben x, y, z, w genau einmal auftritt. Es gilt also $P(E_4^4) = \frac{4!}{4^4} = \frac{3}{32}$.

Die Bestimmung weiterer Wahrscheinlichkeiten $P(E_n^4)$ für konkrete und nicht zu große n ist ebenfalls leicht möglich. Zur Illustration betrachten wir noch $P(E_6^4)$. Das Ereignis besteht nun aus allen 6-Tupeln mit Einträgen aus $\{x, y, z, w\}$, in denen jeder der verwendeten Buchstaben ungerade häufig auftritt. Also tritt einer der Buchstaben genau dreimal und die anderen genau einmal auf. Es gibt 4 Möglichkeiten, den Buchstaben zu wählen, der dreimal auftritt. Dann gibt es $\binom{6}{3}$ Möglichkeiten, seine drei Positionen zu wählen. Für den nächsten Buchstaben verbleiben 3 Möglichkeiten, seine Position zu wählen, für den nächsten 2 Möglichkeiten, und die Position des letzten Buchstabens liegt fest. Es folgt

$$P(E_6^4) = \frac{4 \cdot \binom{6}{3} \cdot 3 \cdot 2}{4^6} = \frac{15}{128} \approx \frac{1}{8}.$$

6 Ausblick

Wir wollen abschließend noch andeuten, welche allgemeinen Fragestellungen noch untersucht werden könnten. Betrachten wir die Käferwanderung auf dem d -dimensionalen Würfel mit n Schritten für be-

liebige Dimension d , so haben wir es mit der Ergebnismenge

$$\Omega_n^d = \{(s_1, \dots, s_n) \mid s_1, \dots, s_n \in \{x_1, x_2, \dots, x_d\}\}$$

zu tun. Das Ereignis E_n^d besteht dann aus allen n -Tupeln mit Einträgen aus $\{x_1, \dots, x_d\}$, in denen jeder der verwendeten Buchstaben ungerade häufig auftritt. Man macht sich leicht klar, dass die Mächtigkeit von E_n^d durch den Ausdruck $d! \cdot U(n, d)$ gegeben ist, wobei $U(n, d)$ die Anzahl aller Partitionen der Menge $\{1, 2, \dots, n\}$ in d Blöcke ungerader Mächtigkeit sei. Die Zahlen $U(n, d)$ sind eng verwandt mit den Stirling-Zahlen zweiter Art, häufig notiert als $S(n, d)$, die die Anzahl aller Partitionen der Menge $\{1, 2, \dots, n\}$ in d Blöcke angeben. Sowohl das Studium der Zahlen $U(n, d)$ als auch das der Zahlen $S(n, d)$ ist sehr interessant, für Näheres zu den ersteren siehe Carl/Schmitz (2019), zu den zweiteren siehe Graham/Knuth/Patashnik (1994), S. 257 ff. Durch die oben behandelten Spezialfälle deuten sich bereits die plausiblen Vermutungen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(E_{2n}^d) = \frac{1}{2^{d-1}} \quad \text{für gerades } d,$$

und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(E_{2n-1}^d) = \frac{1}{2^{d-1}} \quad \text{für ungerades } d,$$

an, die sich auch präzise bestätigen lassen.

7 Schlussbemerkungen

Das hier vorgestellte Problemfeld wurde von den Autoren und ihren Kollegen bereits in verschiedenen (teilweise sehr offenen) Settings mit Schülerinnen und Schülern sowie Studierenden erprobt und dabei ganz unterschiedlich weit verfolgt. Bei jedem Einsatz haben wir es als motivierend und mathematisch sowie didaktisch reichhaltig empfunden. Das sind natürlich subjektive Eindrücke, die sich nicht auf die Allgemeinheit übertragen lassen, wir möchten aber jeden ermutigen, es selbst auszuprobieren. Der vorliegende Artikel kann nur einen Ausschnitt möglicher Fragestellungen, Ansätze und Erkenntnispfade in diesem Problembereich darstellen. Wir möchten ausdrücklich darauf hinweisen, dass es gerade die Vielfalt an denkbaren Zugängen und Auffassungen ist, die das Thema reizvoll macht. Verschiedene Variationen der Fragestellung sind naheliegend, von denen hier nur zwei genannt werden sollen:

¹Die Hamming-Distanz zweier n -Tupel ist die Anzahl der Stellen, in denen sie verschiedene Einträge besitzen. Die Hamming-Distanz zum Ursprung $(0, 0, 0)$ ist bei uns also die Anzahl der Einsen im aktuellen Positionstupel des Käfers.

- Mit welcher Wahrscheinlichkeit kehrt der Käfer nach n Schritten zu seiner Ausgangsposition zurück?
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat der Käfer nach n Schritten die Distanz k zur Ausgangsposition?

7.1 Auffassung als Markov-Kette

Die Käferwanderung lässt sich als Markovkette mit dem Zustandsraum $\{0, 1, 2, 3\}$ auffassen, wobei die Zustände die Hamming-Distanz¹ zum Startpunkt S angeben, d. h.: Der Zustand 0 bedeutet, dass der Käfer in S steht; 1 bedeutet, er steht in einem der A_i ; 2 bedeutet, er steht in einem der B_i ; und 3 bedeutet, er steht in Z . Die zugehörige Übergangsmatrix lautet dann

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Wahrscheinlichkeit $P(E_n^3)$ stimmt dann mit dem Eintrag in der rechten oberen Ecke der n -ten Potenz von M überein. Beispielsweise gilt

$$M^5 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{61}{81} & 0 & \frac{20}{81} \\ \frac{61}{243} & 0 & \frac{182}{243} & 0 \\ 0 & \frac{182}{243} & 0 & \frac{61}{243} \\ \frac{20}{81} & 0 & \frac{61}{81} & 0 \end{pmatrix},$$

und $P(E_5^3)$ kann in der rechten oberen Ecke abgelesen werden.

7.2 Zusammenhang zum Ehrenfest-Modell

Die Käferwanderung lässt sich auch als sogenanntes Ehrenfest-Modell auffassen, was wir zunächst anhand eines konkreten Beispiels illustrieren wollen. Es gibt zwei Behälter, die mit 0 und 1 beschriftet sind, und zu Beginn liegen drei Kugeln in Behälter 0. In jedem Schritt wird eine der drei Kugeln zufällig gewählt und in den jeweils anderen Behälter gelegt. Im ersten Schritt wird also mit Wahrscheinlichkeit 1 eine Kugel vom Behälter 0 in den Behälter 1 gelegt. Im zweiten Schritt wird mit Wahrscheinlichkeit $2/3$ eine weitere Kugel aus Behälter 0 in Behälter 1, und mit Wahrscheinlichkeit $1/3$ die Kugel aus Behälter 1 zurück in Behälter 0 gelegt, usw. Man sieht, dass sich der Übergangsgraph aus Abb. 5 auf Seite 2 ergibt, wobei S dem Zustand entspricht, dass alle Kugeln in Behälter 0 liegen; A_i bedeutet, dass genau eine Kugel in Behälter 1 liegt; B_i bedeutet, dass genau 2 Kugeln in Behälter 1 liegen; und Z bedeutet, dass

alle Kugeln in Behälter 1 liegen. In einem Modell mit d Kugeln (wobei anfangs alle Kugeln in Behälter 0 liegen) stimmt das von uns betrachtete Ereignis E_n^d mit dem Ereignis überein, dass nach n Schritten alle Kugeln in Behälter 1 liegen.

Das Ehrenfestsche Urnenmodell wurde erstmals in Ehrenfest/Ehrenfest (1907) betrachtet und trug seinerzeit entscheidend dazu bei, einen scheinbaren physikalischen Widerspruch (den so genannten „Wiederkehrwand“) aufzuklären. Dies führte insgesamt zu einer stärkeren Akzeptanz wahrscheinlichkeitstheoretischer Annahmen in der Physik (vgl. Mürrmann (2014), S. 206). Näheres hierzu und zum Ehrenfest-Modell im Allgemeinen findet man ebd.

Danksagung

Wir danken den anonymen Referees für hilfreiche Anregungen und Verbesserungsvorschläge.

Literatur

- Carl, M., Schmitz, M. (2019): How to grow it? Strategies of mathematical development presented by the example of enumerating certain set partitions. *Mathematische Semesterberichte* (2019). <https://doi.org/10.1007/s00591-019-00267-y>
- Ehrenfest, P., Ehrenfest, T. (1907): Über zwei bekannte Einwände gegen das Boltzmannsche H-

Theorem. *Physikalische Zeitschrift*, 8. Jg., No. 9, S. 311-314

Graham, R. L., Knuth, D. E., Patshnik, O. (1994): *Concrete Mathematics, Second Edition*. New York: Addison-Wesley Publishing Company

Henze, N. (2018): *Irrfahrten–Faszination der Random Walks. Ein elementarer Einstieg in die stochastischen Prozesse*, 2., überarbeitete Auflage. Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH

Mürrmann, M. (2014): *Wahrscheinlichkeitstheorie und stochastische Prozesse*. Berlin: Springer-Verlag

Riehl, G. (2013): Irrfahrt-Probleme – eine Ergänzung zur Käferwanderung auf dem Würfel. *Stochastik in der Schule* 33 (2013) 1, S. 15–20

Winkenbach, B. (2011): Die Käferwanderung auf dem Würfel. *Stochastik in der Schule* 31 (2011) 2, S. 23–27

Anschrift der Verfasser

Hinrich Lorenzen und Michael Schmitz
Abteilung für Mathematik und ihre Didaktik
Europa-Universität Flensburg
Auf dem Campus 1, 24941 Flensburg
hinrich.lorenzen@uni-flensburg.de
michael.schmitz@uni-flensburg.de